

שיטות כמותיות בניהול

פרק 20 - אלגברה ליניארית - מטריצות

תוכן העניינים

1. מטריצות..... 1
2. המטריצה ההופכית..... 6

מטריצות

שאלות

- (1) נתונות המטריצות הבאות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$
ה. $B+AB$ ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$
ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

- (2) מצאו את x, y, z , אם ידוע כי:
- $$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

(3) א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$

ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$

(4) $2tr(D^2 - 2E)$

(5) א. $4C^T + A$ ב. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

(6) $I_2 BC$

(7) $tr(C^T C)$

(8) $DABC$

(9) נתון כי A מטריצה ריבועית מסדר n .

$$\text{נתון כי } (A - I)(A + I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו: $A = I$ או $A = -I$.

(10) אפיינו את כל המטריצות $A_{2 \times 2}$ שמקימות $A^2 = -4I$.

$$(11) \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1 - 2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

(12) שתי מטריצות A ו- B יקראו מתחלפות אם $AB = BA$.

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות A ו- B מתחלפות עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז המטריצות

A ו- B מתחלפות.

ב. אם המטריצה A מתחלפת עם המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, אז $A^T = -A$.

(13) תהי A מטריצה ריבועית מסדר n .

$$\text{נתון כי } AA^T = 0. \text{ הוכיחו כי } A = 0.$$

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי A מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

(14) יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות המקיימות $AB = BA$ (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $AB^k = B^k A$.

ב. הוכיחו כי לכל k טבעי מתקיים $(AB)^k = A^k B^k$.

$$(15) \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A + B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם A ו- B מטריצות ריבועיות

מסדר ℓ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות A ו- B , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של $(A + I)^n$ ו- $(A - I)^n$, כאשר A ו- I ריבועיות מסדר

ℓ .

- 16** א. הגדירו והדגו את המונח מטריצה נילפוטנטית.
 ב. נניח ש- A ו- B מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.
 הוכיחו שגם המטריצות AB ו- $A+B$ נילפוטנטיות.

- 17** תהי $A_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $a_{ij} = \min\{i, j\}$.
 תהי $B_{n \times n}$ מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי: $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

- א. כתבו את המטריצות A ו- B בצורה מפורשת.
 ב. המטריצה C מקיימת $C = A \cdot B$.
 חשבו את C ומצאו נוסחה עבור c_{ij} לכל $1 \leq i, j \leq n$.

- 18** מצאו מטריצה ממשית A , כך שיתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A - \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$.

תשובות סופיות

(1) א. 4×6 ב. לא. ג. 4×2 ד. לא. ה. לא. ו. 6×6

ז. 6×2 ח. לא. ט. 6×4 י. 6×6

(2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10) $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג. $(A+I)^n = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} A^1 + \binom{n}{n} I$

$(A-I)^n = \binom{n}{0} A^n - \binom{n}{1} A^{n-1} + \binom{n}{2} A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n-1} A^1 + (-1)^n \binom{n}{n} I$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א. (17)}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \cdots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min \{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(18)}$$

המטריצה ההופכית

שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה. בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(2)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(3)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{(4)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\
 \text{(7)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$ הפיכה?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר n , וחלצו את X :

12) א. $AXC = D$ ב. $A^{-1}XC = A^{-1}DC$ ג. $P^{-1}X^T P = A$

13) א. $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$ ב. $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14) $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

15) נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

חשבו את X , אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

(16) נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשבו את Y , אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

(17) נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

חשבו את B , אם נתון בנוסף כי: $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכיחו כי A הפיכה ובטאו את A^{-1} במונחי A ו- I .

(19) נתון כי $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

א. חשבו את $p(A)$.

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- A הפיכה, ובטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(20) נתון כי A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה $I - A$ הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

(21) נתון כי $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$.

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה D , כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C , אז A דומה ל- C .
(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

הערה: בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

(22) תהיינה A, B מטריצות ריבועיות ממסדר $n \geq 2$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א. $AB = BA$.
- ב. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח B הפיכה.
- ג. אם $A^2 - AB = I_n$, אז בהכרח A הפיכה.
- ד. אם $(AB)^{100} = I$, אז בהכרח $(BA)^{100} = I$.
- ה. אם $(AB)^{100} = 0$, אז בהכרח $(BA)^{101} = 0$.

(23) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, עבורן $A^2 + AB = I$.

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$.
- ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$ היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם B היא מטריצת האפס.

(24) תהיינה A, B מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם $AB = I$ אז $B = A^{-1}$.
- ב. אם המכפלה AB היא מטריצה ריבועית, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- ג. אם המכפלה AB היא מטריצה הפיכה, אזי A, B מטריצות ריבועיות.
- ד. המכפלה AB לא הפיכה.
- ה. אם A מטריצה ריבועית והמכפלה AB מוגדרת, אזי B מטריצה ריבועית.

(25) מטריצה ריבועית A תיקרא אידמפוטנטית אם $A^2 = A$. הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו $A = I$, מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
- ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
- ג. אם A מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז $\text{tr}(A) = 1$ או ש- A מטריצה אלכסונית.
- ד. A אידמפוטנטית $\Leftrightarrow A^n = A$, לכל n טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים a, b, c, d כך ש- M תהיה הפיכה ומצאו את M^{-1} במקרה זה.

(27) נתון כי $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$ הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$.

הוכיחו:

$$\text{א. אם } BA = I - A^2 \text{ וגם } B^2 = -AB, \text{ אז } B = 0.$$

$$\text{ב. אם } A^2 = 2I, \text{ אז } A + I \text{ ו-} A - I \text{ הפיכות.}$$

(29) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $B^2A = -2B^3$ (1) וגם

$$(2) B^3 + AB^2 = 3I.$$

הוכיחו ש- A ו- B הפיכות, ובטאו את A^{-1} ו- B^{-1} באמצעות B .

(30) תהיינה A, B מטריצות מסדר $n \times n$, כך ש- $BA + 2I = B$.

א. הוכיחו ש- B הפיכה.

ב. ידוע ש- B סימטרית.

הוכיחו כי A סימטרית.

(31) תהי A מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים n טבעי כך ש- $A^n = 0$).

א. הוכיחו כי A לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי $I - A$ ו- $I + A$ הפיכות.

$$\text{ג. נגדיר: } e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

הוכיחו: אם $e^A = I$ אז $A = 0$.

(32) נתונות שתי מטריצות, A ו- B , מסדר n .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- A ול- A^T יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A+B$ מדורגת קנונית.
- ג. אם A, B מדורגות קנונית, אז $A-B$ מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של B יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של AB יש שורת אפסים.

תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11)$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad A \quad \text{א.} \quad CD^2 - A \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} A - \frac{1}{6} I \quad \text{ב.} \quad A^{-1}$$

$$A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{12} B + \frac{5}{12} I \quad \text{ב.} \quad B^{-1}$$

$$f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad (I - A)^{-1}$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (21)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (22)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (23)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (24)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (25)$$

$$((a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.
28) שאלת הוכחה.
29) שאלת הוכחה.
30) שאלת הוכחה.
31) שאלת הוכחה.
32) ד